

Трудные задачи ЕГЭ

Задачи на переливание

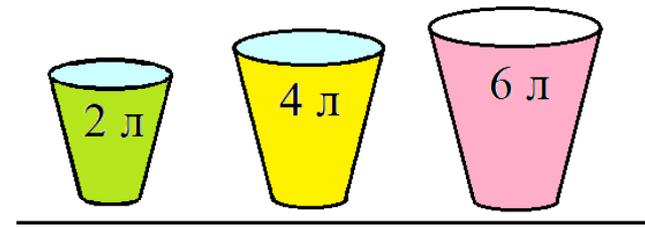


Задачи на переливание - № 19 в ЕГЭ

В сборнике для подготовки к ЕГЭ-2019 появилась задача № 19 на переливание. Похожими, но в более простыми, задачами мы занимались с И.Ф. Шарыгиным, делая книгу «Задачи на смекалку» для 5-6 классов. Обсудим алгоритм полного перебора всех случаев для решения таких задач.

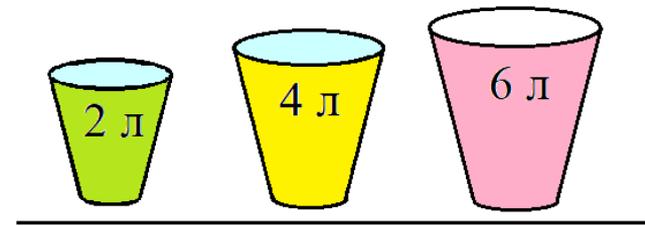
**Учитель математики МКОУ «Хили-Пенджикская СОШ»
Магамедова Валида Умалатовна**

Задача 1



1. Имеется три ведра объёмом 2 л, 4 л и 6 л. В двух первых из которых налита вода до верха, а третье ведро пустое. За одно переливание можно перелить воду из одного ведра в другое. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится (на вёдрах нет делений). Выливать воду из вёдер (не в ведро) или брать воду из какого-либо источника запрещается. а) Можно ли через несколько переливаний разлить воду в три ведра поровну? б) Укажите все возможные способы наполнения вёдер. в) Можно ли через несколько переливаний разлить воду в два ведра поровну?

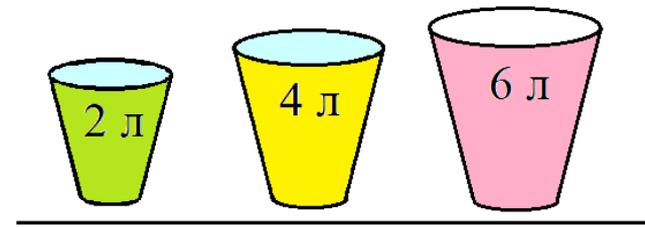
Задача 1



... а) Можно ли через несколько переливаний разлить воду в три ведра поровну? б) Укажите все возможные способы наполнения вёдер. в) Можно ли через несколько переливаний разлить воду в два ведра поровну?

Решение. Результаты переливаний будем записывать в виде троек чисел. Исходное состояние описывается тройкой чисел 240, что означает 2 л в 1-м ведре (двухлитровом), 4 л во 2-м ведре (четырёхлитровом), 0 л в 3-м ведре (шестилитровом). Каждое переливание проводим по следующему алгоритму, пропуская невозможные шаги:

Задача 1

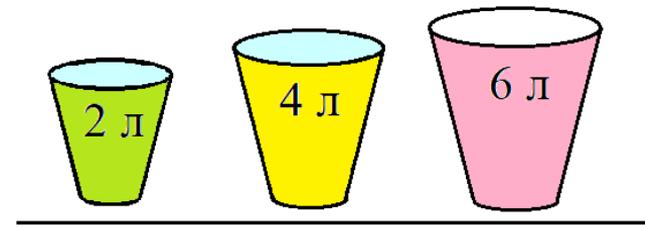


... а) Можно ли через несколько переливаний разлить воду в три ведра поровну? б) Укажите все возможные способы наполнения вёдер. в) Можно ли через несколько переливаний разлить воду в два ведра поровну?

- ... 1) из 1-го во 2-й; 2) из 1-го во 3-й;
3) из 2-го во 1-й; 4) из 2-го во 3-й;
5) из 3-го во 1-й; 6) из 3-го во 2-й.

Алгоритм завершается после n -го шага, если после него не получено ни одного нового варианта для продолжения переливания. Результаты переливания запишем в таблицу.

Задача 1

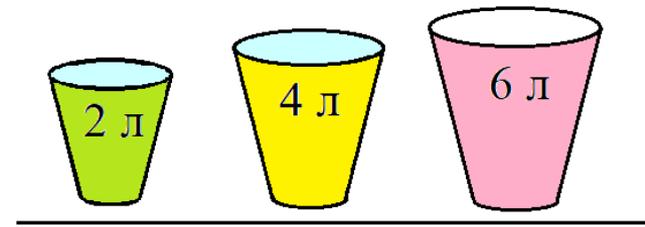


... а) Можно ли через несколько переливаний разлить воду в три ведра поровну? б) Укажите все возможные способы наполнения вёдер. в) Можно ли через несколько переливаний разлить воду в два ведра поровну?

	240			
1	042		204	
2	222	006 240	024	006 240
3	042 024 204 240	204 042	204 006 222 042	

Алгоритм завершён. Отвечаем на вопросы.

Задача 1

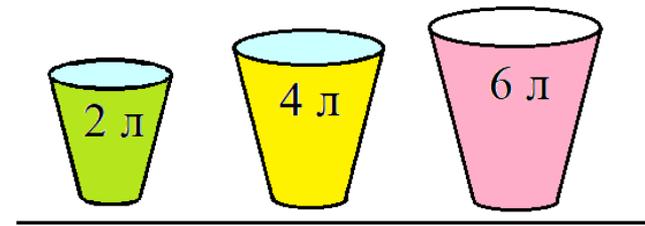


... а) Можно ли через несколько переливаний разлить воду в три ведра поровну?

Ответ. а) Да, например: 240 – 042 – 222; ...

	240			
1	042		204	
2	222	006 240	024	006 240
3	042 024 204 240	204 042	204 006 222 042	

Задача 1

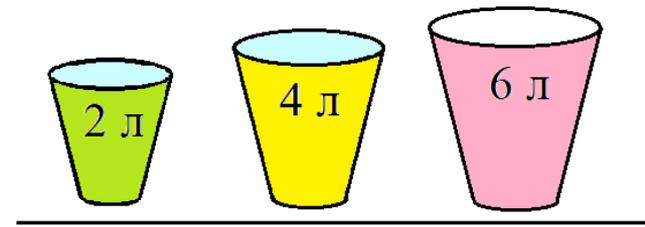


... б) Укажите все возможные способы наполнения вёдер.

...б) 240, 042, 204, 222, 006, 024; ...

	240			
1	042		204	
2	222	006 240	024	006 240
3	042 024 204 240	204 042	204 006 222 042	

Задача 1



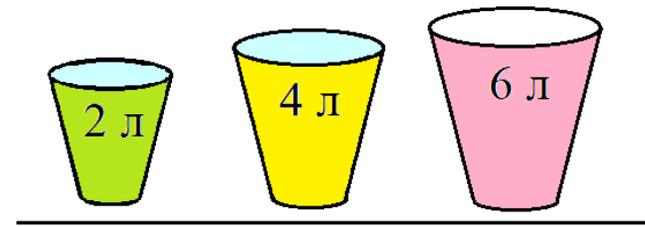
... в) Можно ли через несколько переливаний разлить воду в два ведра поровну?

... в) Нет. Разлить воду в два ведра поровну нельзя, так как вариант 033 получить невозможно.

	240			
1	042		204	
2	222	006 240	024	006 240
3	042 024 204 240	204 042	204 006 222 042	

Есть и второе объяснение.

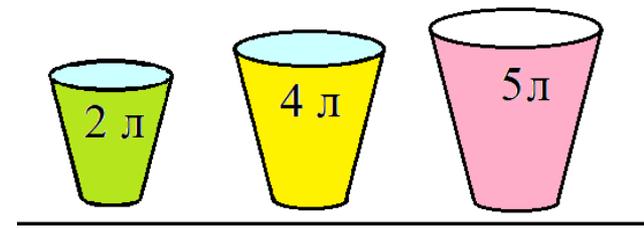
Задача 1



... в) Можно ли через несколько переливаний разлить воду в два ведра поровну?

... Так как объёмы вёдер и первоначальные объёмы воды выражены чётными числами, то в результате любого переливания из исходных чётных чисел сложением или вычитанием невозможно получить нечётное число 3.

Задача 2



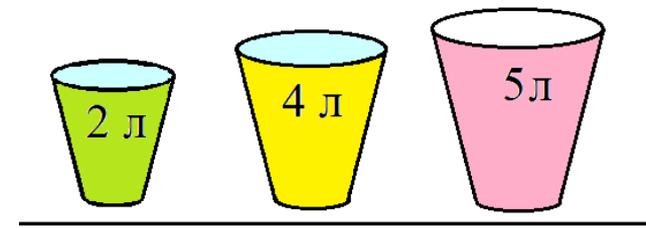
2. Имеется три ведра объёмом 2 л, 4 л и 5 л. В двух первых из которых налита вода до верха, а третье ведро пустое. За одно переливание можно перелить воду из одного ведра в другое. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер или брать воду из какого-либо источника запрещается. Можно ли через несколько переливаний разлить воду:

а) в три ведра поровну?

б) в два ведра поровну?

Решение. Применим описанный выше алгоритм переливаний для трёх вёдер, результаты переливаний запишем в таблицу.

Задача 2



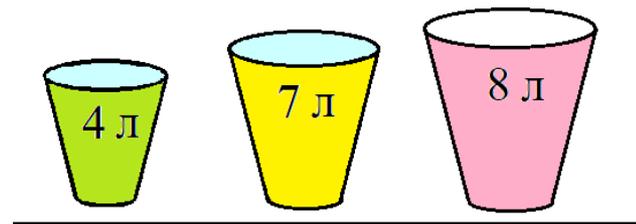
... Можно ли через несколько переливаний разлить воду:
 а) в три ведра поровну? б) в два ведра поровну?

	240		
1	042		204
2	222	015 240	024 105 240
3	042 024 204 240	105 213 042	204 015 222 042 015 204 141
4	033		

... Алгоритм не завершён, так как ответы на вопросы получены.

Ответ. а) Да: 222 после 2-х переливаний; б) да: 033 после 4-х переливаний.

Задача 3 (№ 19, тренир. работа 1)

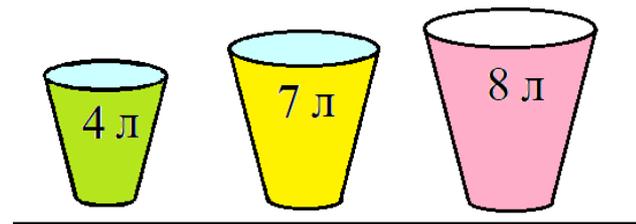


3. У Бори нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Боря переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из ведер запрещается.

а) Мог ли Боря через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 2 л воды, если сначала у него были ведра объёмами 4 л и 7 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 л?

б) ... в) ...

Задача 3 (№ 19, тренир. работа 1)

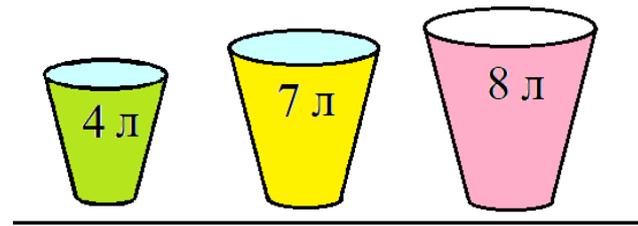


а) Мог ли Боря через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 2 л воды, если сначала у него были ведра объёмами 4 л и 7 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 л?

Решение. а) Применим наш алгоритм (не до конца).

	470		
1	074		407
2	434	038 470	047 308 470
3	074 038 407 470	308 434 074	407 038 443 074 038 407 371
4			173 047 407 470 074 461 308 470
5			074 443 128 470 371 065 407 470
6			425

Задача 3 (№ 19, тренир. работа 1)



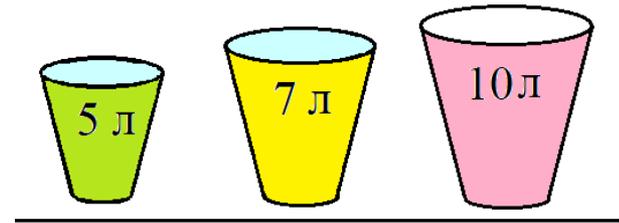
а) Мог ли Боря через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 2 л воды, если сначала у него были ведра объёмами 4 л и 7 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 л?

... Получить 2 л воды в одном ведре можно, выполнив пять переливаний $470 - 407 - 047 - 443 - 173 - 128$, или шесть: $470 - 407 - 308 - 371 - 461 - 065 - 425$. Завершать алгоритм не нужно, так как ответ на вопрос уже получен. В сборнике [1] ответ приведён для семи переливаний:

$470 - 074 - 038 - 308 - 371 - 461 - 065 - 425$.

Ответ на вопрос: да.

Задача 3 (№ 19, тренир. работа 1)

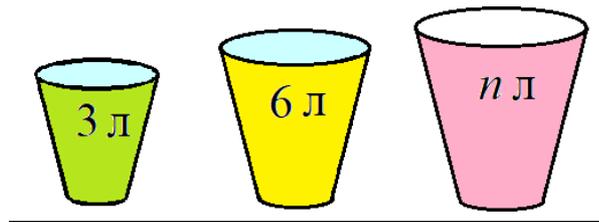


б) Мог ли Боря через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех ведрах, если сначала у него были ведра объёмами 5 л и 7 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 л?

... б) У Бори было 12 л воды, получить в трёх вёдрах по 4 л воды он не мог, так как такой результат не мог получиться в соответствии с условиями задачи. Каждый результат переливания должен давать хотя бы одно пустое или одно полное ведро, а этого нет в результате 444.

Ответ на вопрос: нет.

Задача 3 (№ 19, тренир. работа 1)

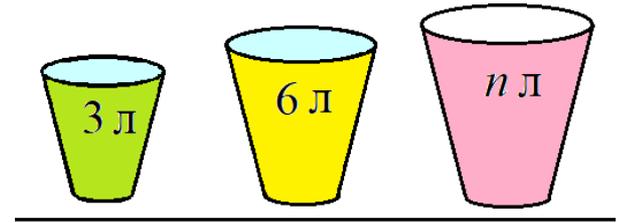


в) Сначала у Боря были ведра объёмами 3 л и 6 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом n л. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n , если известно, что как бы ни старался Боря, он не сможет получить через несколько шагов ровно 4 л воды в одном из вёдер?

... Выполним алгоритм переливаний для $n = 9$.

	360		
1	063		306
2	333	009 360	036 009 360
3	063 306 360	306 063	306 009 333 063

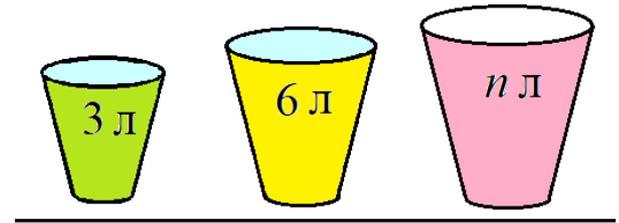
Задача 3 (№ 19, тренир. работа 1)



в) Сначала у Боря были ведра объёмами 3 л и 6 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом n л. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n , если известно, что как бы ни старался Боря, он не сможет получить через несколько шагов ровно 4 л воды в одном из вёдер?

... Получить 4 л воды в одном ведре невозможно, так как алгоритм переливаний завершен и 4 л не появилось ни в одном ведре. Если взять $n > 9$, то алгоритм переливаний полностью повторится, так как в третье ведро входит вся вода для любого $n \geq 9$. Выполним алгоритм переливаний для $n = 8$.

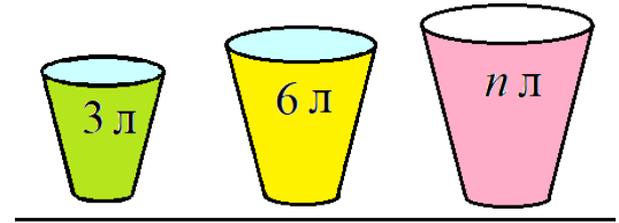
Задача 3 (№ 19, тренир. работа 1)



в) Сначала у Боря были ведра объёмами 3 л и 6 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом n л. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n , если известно, что как бы ни старался Боря, он не сможет получить через несколько шагов ровно 4 л воды в одном из вёдер?

	360		
1	063		306
2	333	018 360	036 108 360
3	063 306 360	108 315	306 009 333 063 018 306 162
4		045	

Задача 3 (№ 19, тренир. работа 1)



в) Сначала у Боря были ведра объёмами 3 л и 6 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом n л. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n , если известно, что как бы ни старался Боря, он не сможет получить через несколько шагов ровно 4 л воды в одном из вёдер?

Наибольшего натурального значения n не существует. В сборнике [1] дан ответ: $n = 8$. Получить 4 л воды в одном ведре можно за 4 переливания для $n = 8$: 360 – 063 – 018 – 108 – 045.

Ответ. а) да: 470 – 407 – 047 – 443 – 173 – 128; б) нет; в) наибольшего n не существует.

Задача 3 (№ 19, тренир. работа 1)

Аналогичное несоответствие условия и ответа находим в следующих тренировочных работах 2 – 6 сборника [1].

Используемая литература

1. **ЕГЭ 2019** : Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ и 800 заданий части 2 / под ред. И.В. Яценко. М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2019. – 239 с.

