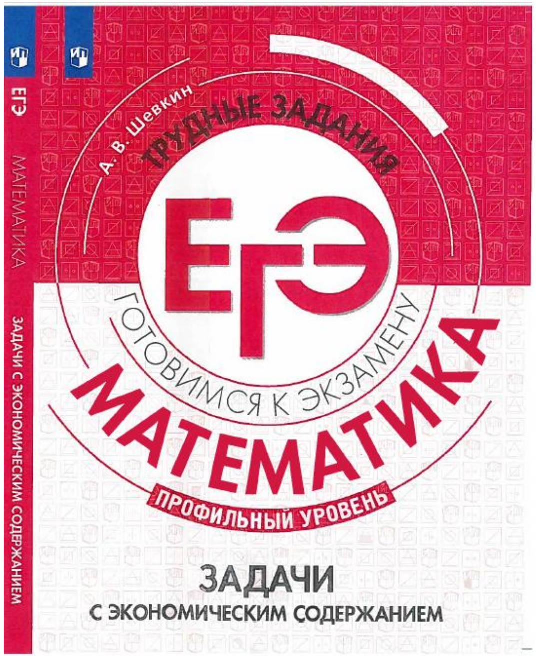
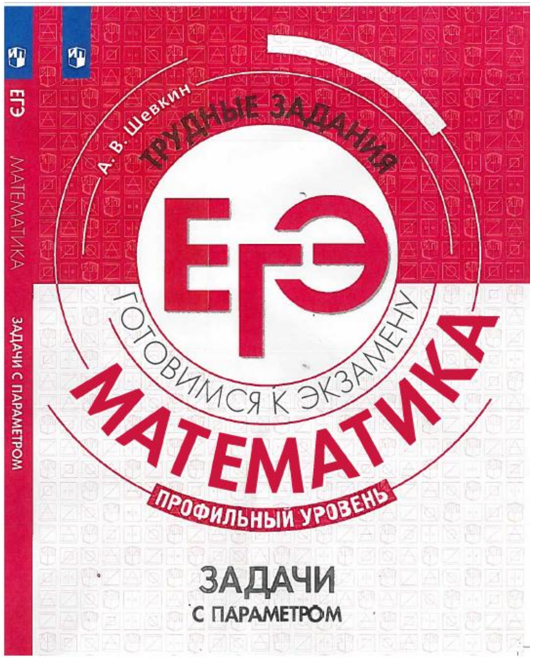
Трудные задачи ЕГЭ





Параметры. Использование системы координат *xOa*

Некоторые задачи, сформулированные для неизвестного x и параметра a, можно решать, рассматривая уравнения, неравенства и их системы как уравнения, неравенства и системы двух неизвестных x и a. Рассмотрим примеры задач, в которых используется система координат xOa.

Учитель математики МКОУ «Хили-Пенджикская СОШ»

Магамедова Валида Умалатовна

Подготовительные задания

1. Изобразите в системе координат xOy все решения $(x;\, y)$ системы неравенств

$$\begin{cases} |x+y| \le 2, \\ x^2 - x - 2 \le 0. \end{cases}$$

Подготовительные задания

1. Изобразите в системе координат xOy все решения $(x; y)$ системы неравенств

$$\begin{cases} |x+y| \le 2, \\ x^2 - x - 2 \le 0. \end{cases}$$

Решение. 1) Неравенство $|x+y| \le 2$ равносильно системам неравенств:

$$\begin{cases} x+y \le 2, \\ x+y \ge -2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y \le 2-x, \\ y \ge -2-x. \end{cases}$$

Построим прямые $y = 2 - x$ и $y = -2 - x$.

Подготовительные задания

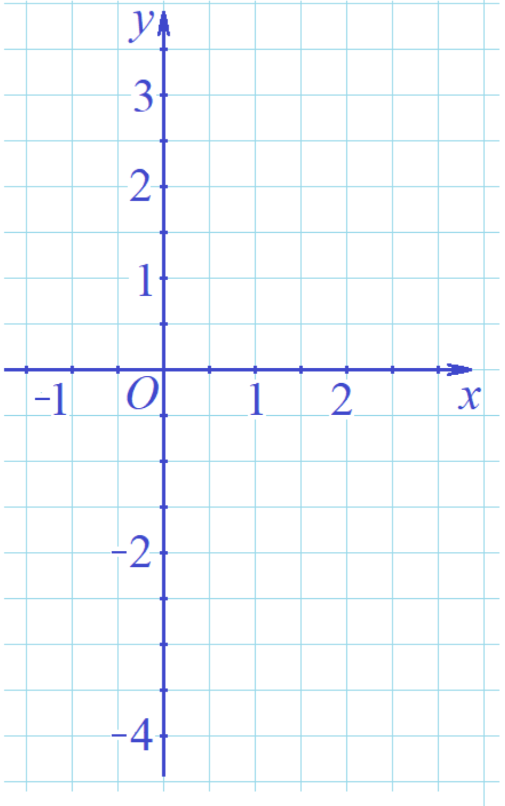
1. Изобразите в системе координат xOy все решения $(x;\, y)$ системы неравенств

$$\begin{cases} |x+y| \le 2, \\ x^2 - x - 2 \le 0. \end{cases}$$

$$\ldots \begin{cases} y \le 2 - x, \\ y \ge -2 - x. \end{cases} \qquad (1)$$

Построим прямые

$y = 2 - x$ и $y = -2 - x$.



Подготовительные задания

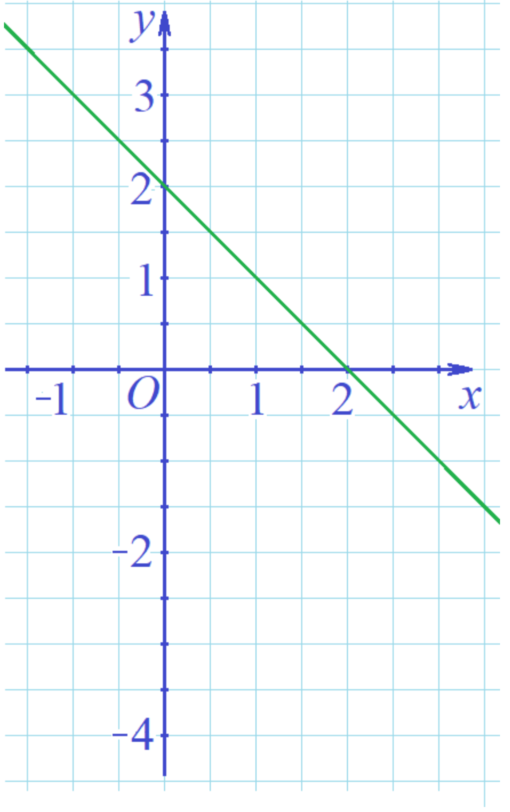
1. Изобразите в системе координат xOy все решения $(x;\, y)$ системы неравенств

$$\begin{cases} |x + y| \le 2, \\ x^2 - x - 2 \le 0. \end{cases}$$

$$\ldots \begin{cases} y \le 2 - x, \\ y \ge -2 - x. \end{cases} \qquad (1)$$

Построим прямые

$y = 2 - x$ и $y = -2 - x$.



Подготовительные задания

1. Изобразите в системе координат xOy все решения $(x;\, y)$ системы неравенств

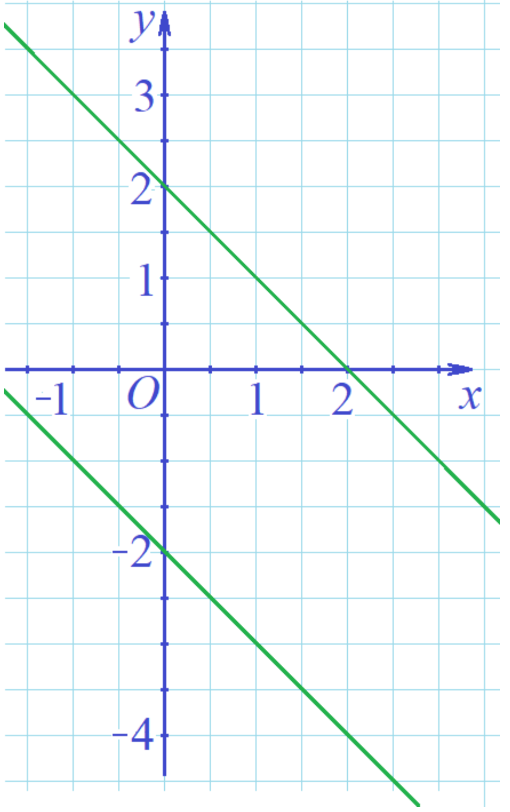
$$\begin{cases} |x+y| \le 2, \\ x^2 - x - 2 \le 0. \end{cases}$$

$$\ldots \begin{cases} y \le 2 - x, \\ y \ge -2 - x. \end{cases} \qquad (1)$$

Построим прямые

$y = 2 - x$ и $y = -2 - x$.

Выберем в системе координат xOy область, все точки которой удовлетворяют системе (1).



Подготовительные задания

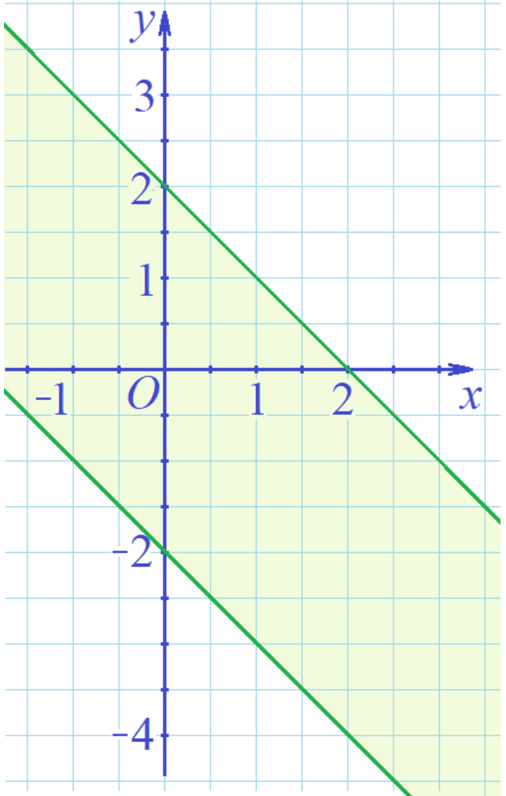
1. Изобразите в системе координат xOy все решения $(x;\, y)$ системы неравенств

$$\begin{cases} |x+y| \le 2, \\ x^2 - x - 2 \le 0. \end{cases}$$

$$\dots \begin{cases} y \le 2 - x, \\ y \ge -2 - x. \end{cases} \qquad (1)$$

Построим прямые $y = 2 - x$ и $y = -2 - x$.

Выберем в системе координат xOy область, все точки которой удовлетворяют системе (1).



Подготовительные задания

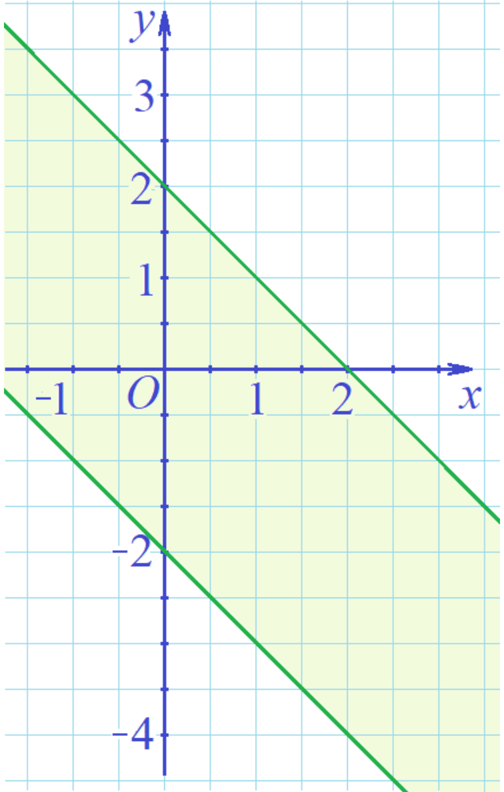
1. Изобразите в системе координат xOy все решения $(x; y)$ системы неравенств

$$\begin{cases} |x+y| \le 2, \\ x^2 - x - 2 \le 0. \end{cases}$$

… 2) Выберем в системе координат xOy область, все точки которой удовлетворяют неравенству

$$x^2 - x - 2 \le 0,$$

$$(x+1)(x-2) \le 0. \qquad (2)$$



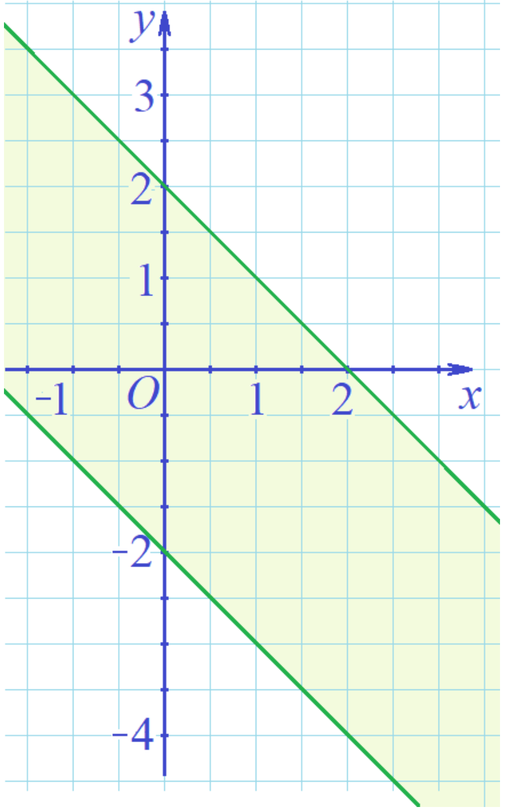
Подготовительные задания

1. Изобразите в системе координат xOy все решения $(x;\, y)$ системы неравенств

$$\begin{cases} |x+y| \le 2, \\ x^2 - x - 2 \le 0. \end{cases}$$

… $$(x+1)(x-2) \le 0. \quad (2)$$

Для этого построим прямые $x = -1$ и $x = 2$.



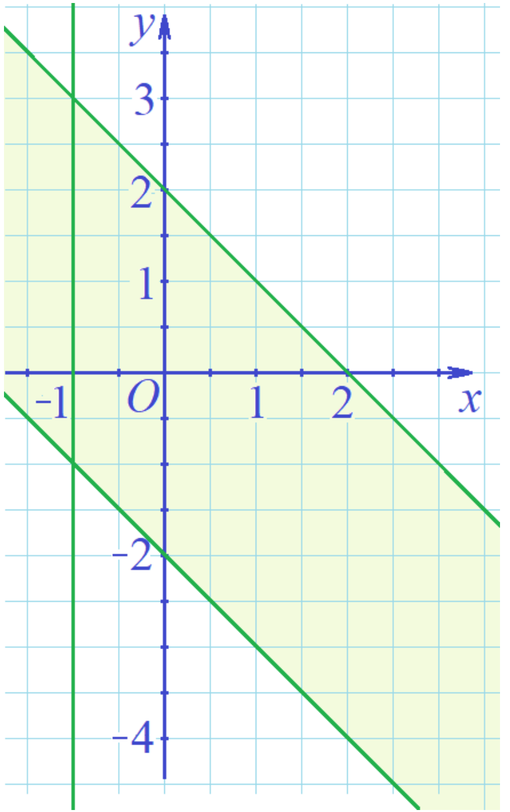
Подготовительные задания

1. Изобразите в системе координат xOy все решения $(x; y)$ системы неравенств

$$\begin{cases} |x+y| \le 2, \\ x^2 - x - 2 \le 0. \end{cases}$$

… $$(x+1)(x-2) \le 0. \qquad (2)$$

Для этого построим прямые $x = -1$ и $x = 2$.



Подготовительные задания

1. Изобразите в системе координат xOy все решения $(x;\, y)$ системы неравенств

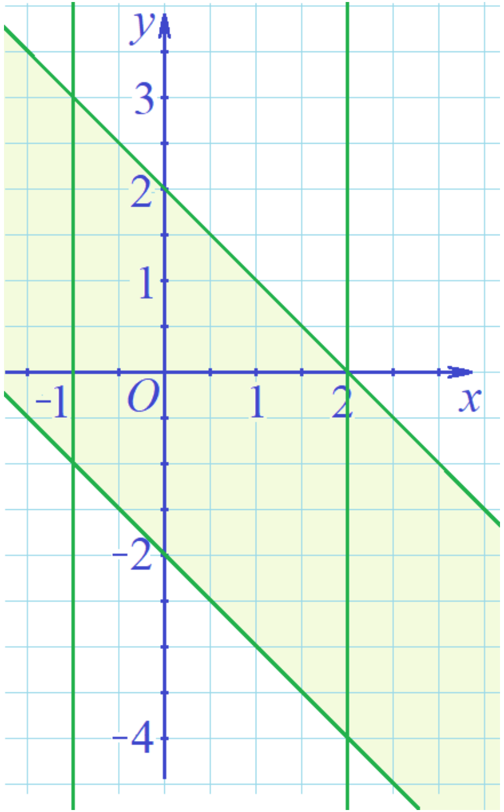
$$\begin{cases} |x+y| \le 2, \\ x^2 - x - 2 \le 0. \end{cases}$$

… $\qquad (x+1)(x-2) \le 0. \qquad (2)$

Для этого построим прямые $x = -1$ и $x = 2$.

Выберем все точки $(x;\, y)$, которые удовлетворяют и системе (1), и неравенству (2).

Получим параллелограмм с вершинами $(2;\, 0)$, $(2;\, -4)$, $(-1;\, -1)$ и $(-1;\, 3)$.



Подготовительные задания

1. Изобразите в системе координат xOy все решения $(x; y)$ системы неравенств

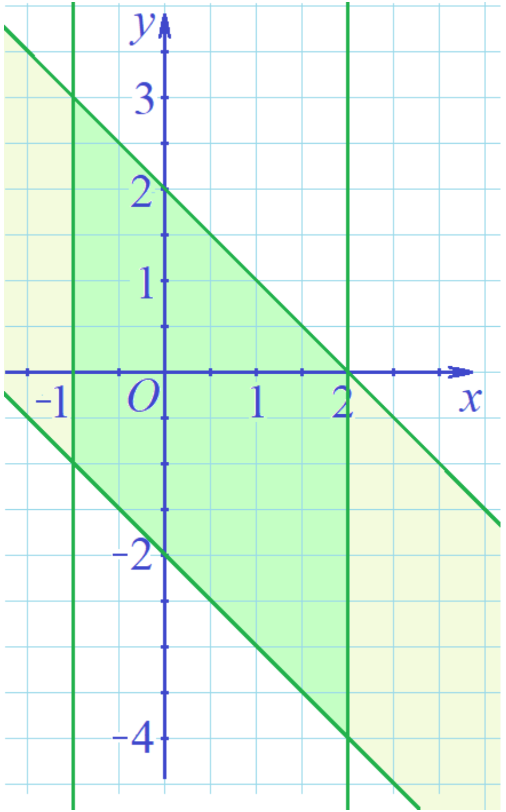
$$\begin{cases} |x + y| \le 2, \\ x^2 - x - 2 \le 0. \end{cases}$$

… $\quad (x + 1)(x - 2) \le 0. \qquad (2)$

Для этого построим прямые $x = -1$ и $x = 2$.

Выберем все точки $(x; y)$, которые удовлетворяют и системе (1), и неравенству (2).

Получим параллелограмм с вершинами $(2; 0)$, $(2; -4)$, $(-1; -1)$ и $(-1; 3)$.



Подготовительные задания

2. Сколько решений имеет система неравенств

$$\begin{cases} |x+y| \le 2, \\ x^2 - x - 2 \le 0 \end{cases}$$

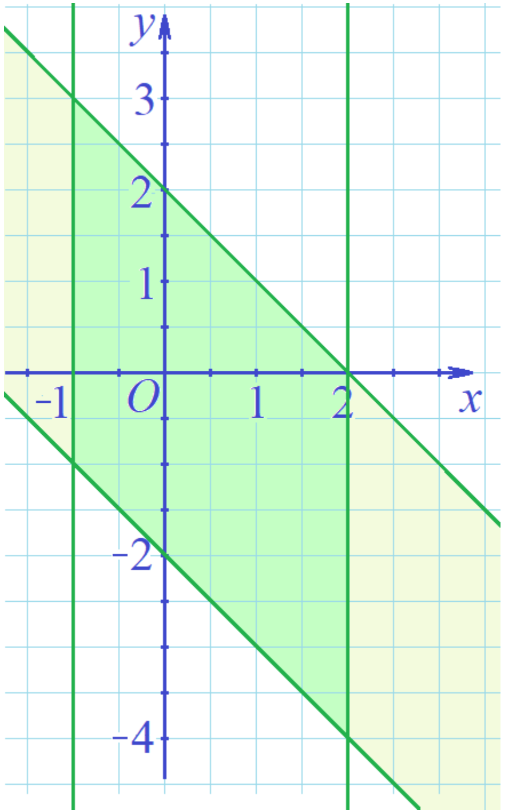
при $y = -4{,}5;\ -4;\ 0;\ 2;\ 3;\ 4$?

3. При каких значениях y система неравенств:

а) имеет решения; б) не имеет решений;

в) имеет единственное решение?

Мы искали ответы на вопросы в зависимости от значений величины y. Такую величину называют **параметром**. Сформулируем решённую задачу как задачу с параметром.



Задача с параметром

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x + a| \leq 2, \\ x^2 - x - 2 \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Чем отличается эта задача от предыдущей? Как будем решать?

Задача с параметром

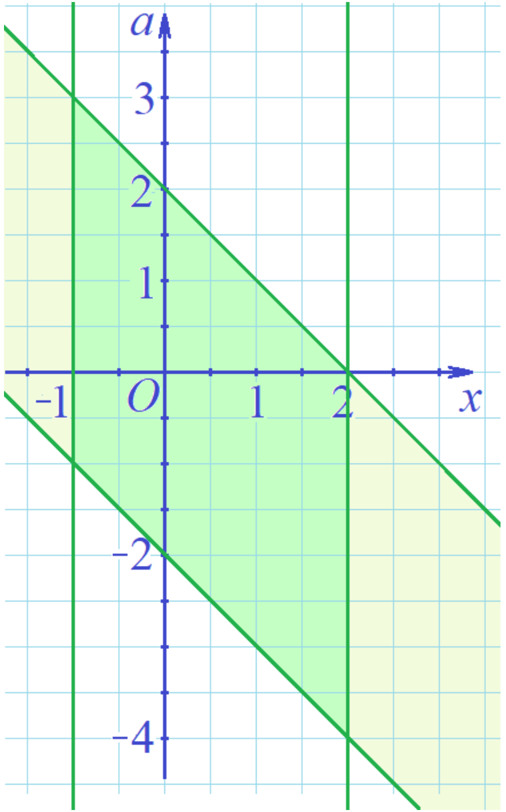
4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x + a| \le 2, \\ x^2 - x - 2 \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Полностью повторив решение задач **1** и **3 (в)** с заменой y на a, получим ответ на вопрос нашей задачи:

при $a = -4$ и при $a = 3$.



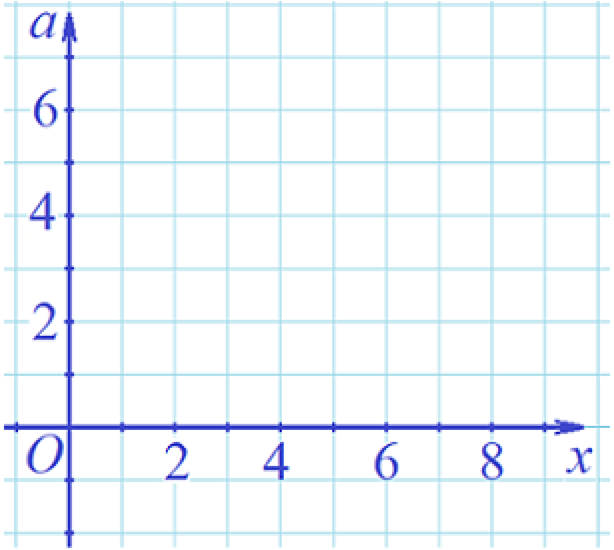
Задача с параметром

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} a \geq |x-2|, \\ 2a - x \leq 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Задача с параметром

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} a \geq |x-2|, \\ 2a - x \leq 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. 1) В системе координат xOa построим график функции $a = |x-2|$.



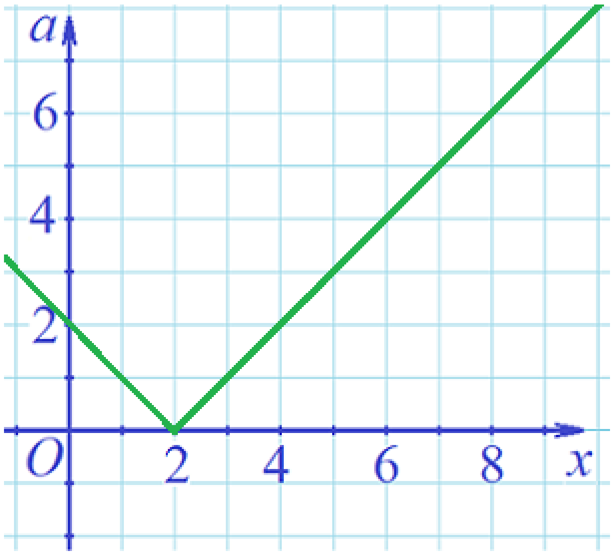
Задача с параметром

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} a \geq |x-2|, \\ 2a - x \leq 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. 1) В системе координат xOa построим график функции $a = |x-2|$.

Выберем все точки $(x; a)$, которые удовлетворяют неравенству

$$a \geq |x-2|. \qquad (1)$$



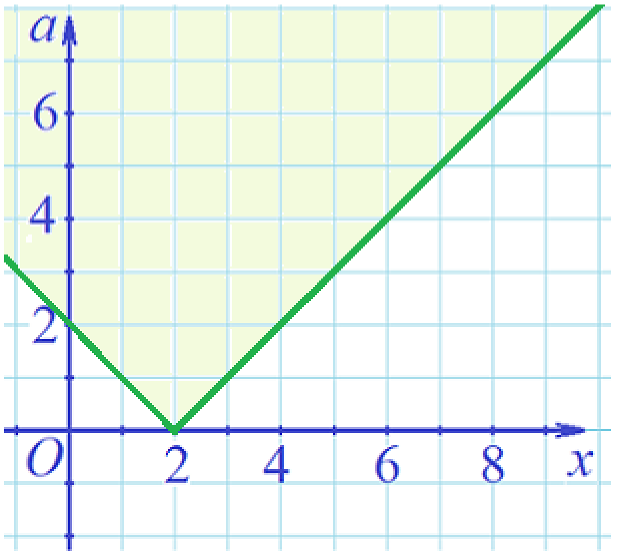
Задача с параметром

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} a \geq |x-2|, \\ 2a - x \leq 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. 1) В системе координат xOa построим график функции $a = |x-2|$.

Выберем все точки $(x; a)$, которые удовлетворяют неравенству

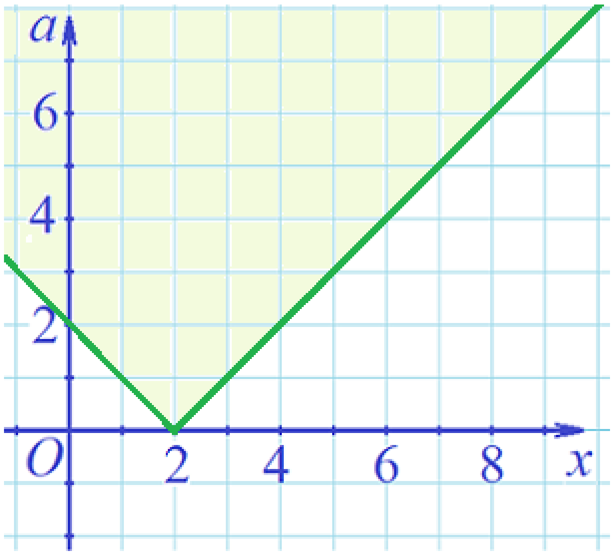
$$a \geq |x-2|. \qquad (1)$$



Задача с параметром

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} a \geq |x-2|, \\ 2a - x \leq 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

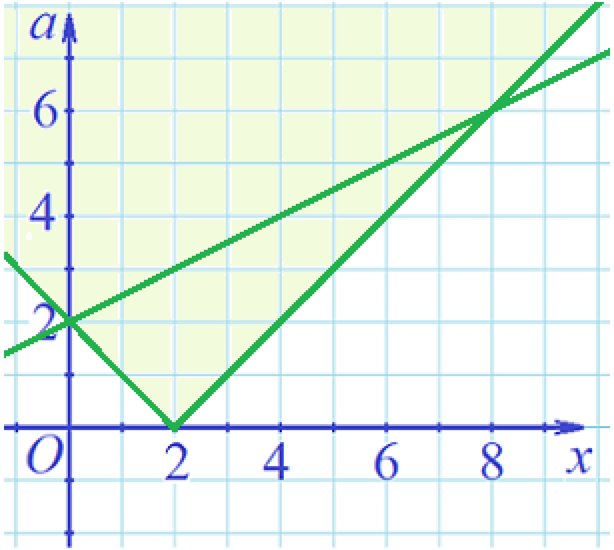
… 2) В той же системе координат построим график функции $a = 0{,}5x + 2$.



Задача с параметром

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} a \geq |x-2|, \\ 2a - x \leq 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

… 2) В той же системе координат построим график функции $a = 0{,}5x + 2$.



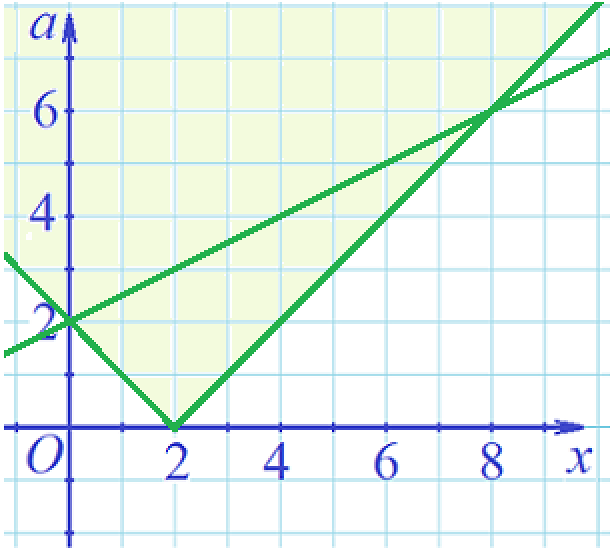
Задача с параметром

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} a \geq |x-2|, \\ 2a - x \leq 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

… 2) В той же системе координат построим график функции $a = 0{,}5x + 2$.

Выберем все точки $(x; a)$, которые удовлетворяют неравенству

$$a \leq 0{,}5x + 2, \qquad (2)$$



Задача с параметром

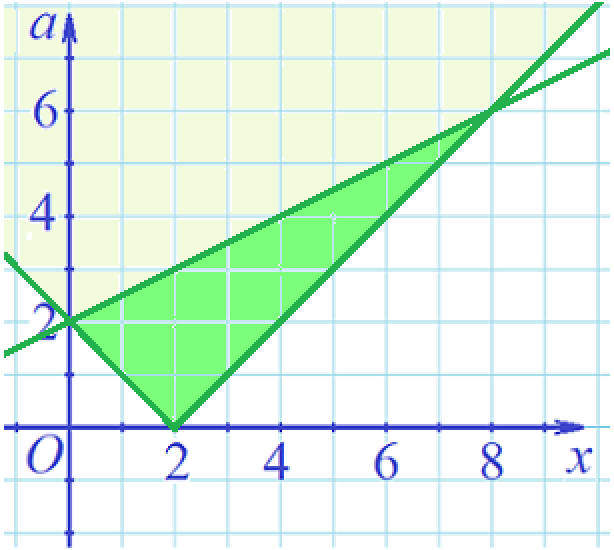
5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} a \geq |x-2|, \\ 2a - x \leq 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

… 2) В той же системе координат построим график функции $a = 0{,}5x + 2$.

Выберем все точки $(x; a)$, которые удовлетворяют неравенству

$$a \leq 0{,}5x + 2, \qquad (2)$$

а из них все точки $(x; a)$, которые удовлетворяют неравенствам (1) и (2).



Задача с параметром

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} a \geq |x-2|, \\ 2a - x \leq 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

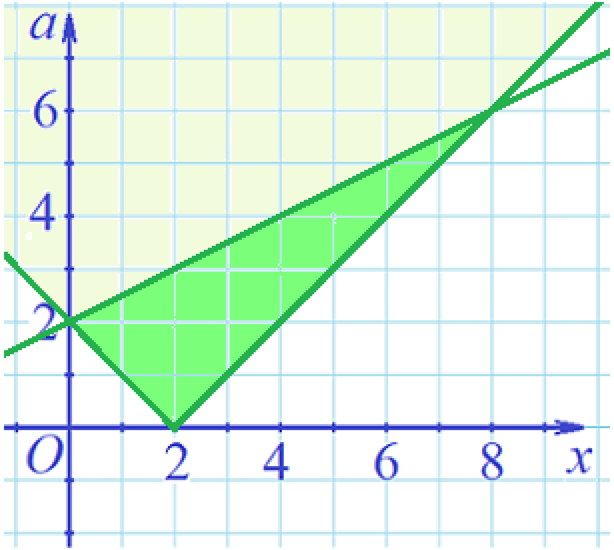
… Теперь ответим на вопрос задачи.

Система имеет единственное решение при $a = 0$ и при $a = 6$.

Ответ. $a = 0$, $a = 6$.

Дополнительные вопросы.

При каких значениях a система: не имеет решений; имеет бесконечно много решений?



Параметры. Использование системы координат *xOa*

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых не имеет решений система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + a^2 - 2x \le 3, \\ a \le \sqrt{x+1}, \\ 3a + x \le 3. \end{cases}$$

Решение. Каждое решение $(x;\ a)$ системы изобразим точкой координатной плоскости xOa. Сначала изобразим все точки, удовлетворяющие каждому неравенству системы.

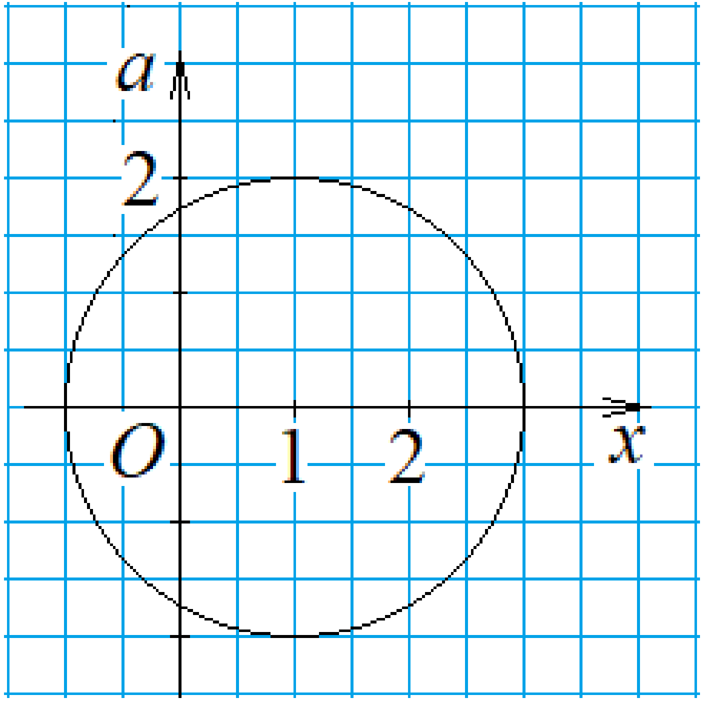
Параметры. Использование системы координат *xOa*

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых не имеет решений система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + a^2 - 2x \le 3, \\ a \le \sqrt{x+1}, \\ 3a + x \le 3. \end{cases}$$

... Первое неравенство перепишем в виде $(x-1)^2 + a^2 \le 4$.

Оно задаёт круг с центром (1; 0) и радиусом 2.

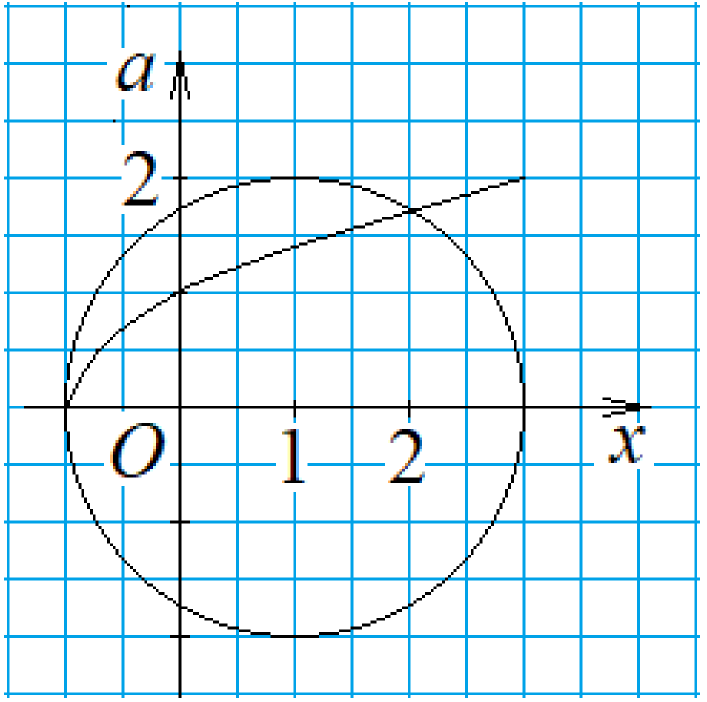


Параметры. Использование системы координат xOa

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых не имеет решений система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + a^2 - 2x \leq 3, \\ a \leq \sqrt{x+1}, \\ 3a + x \leq 3. \end{cases}$$

… Второе неравенство задаёт часть плоскости на и под графиком функции $a = \sqrt{x+1}$.



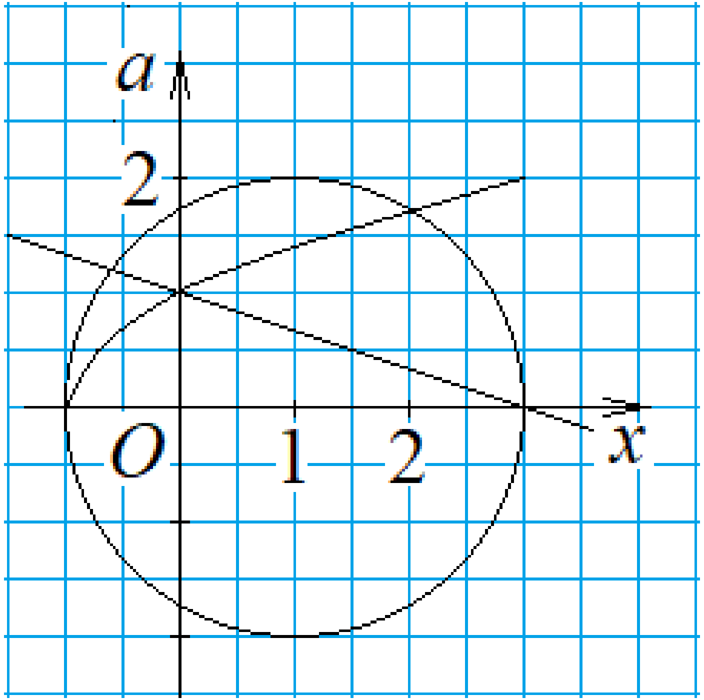
.

Параметры. Использование системы координат *xOa*

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых не имеет решений система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + a^2 - 2x \le 3, \\ a \le \sqrt{x+1}, \\ 3a + x \le 3. \end{cases}$$

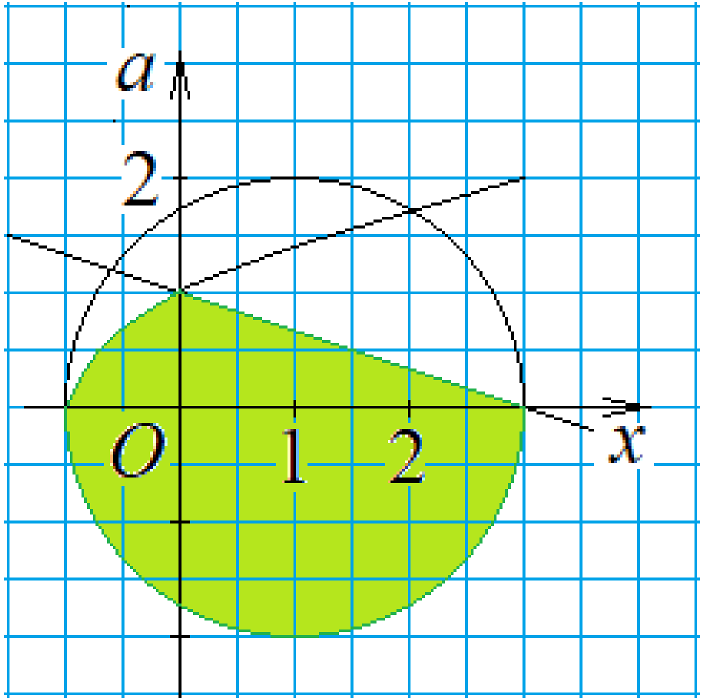
... Третье неравенство задаёт полуплоскость с границей $a = 1 - \frac{1}{3}x$. Все пары чисел $(x;\, a)$, являющиеся решениями системы изображены точками закрашенной области.



Параметры. Использование системы координат *xOa*

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых не имеет решений система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + a^2 - 2x \le 3, \\ a \le \sqrt{x+1}, \\ 3a + x \le 3. \end{cases}$$



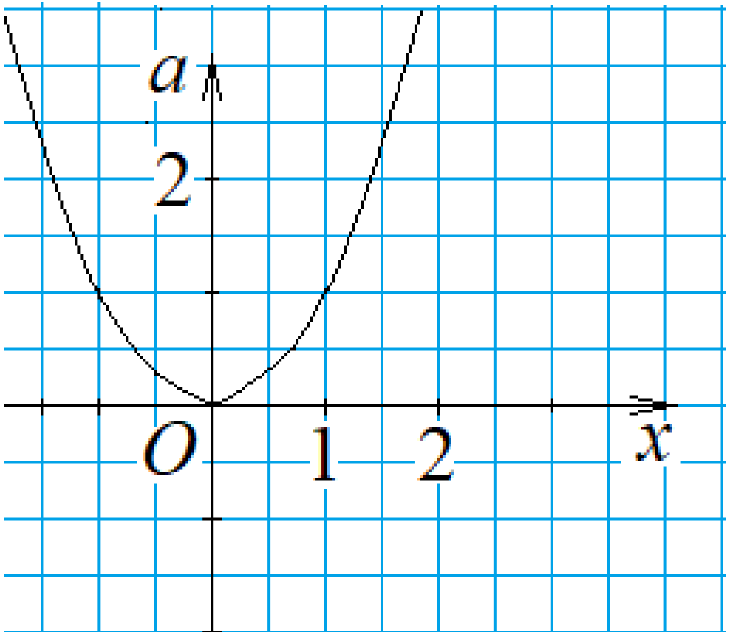
... При каждом значении $a \in [-2; 1]$ система имеет хотя бы одно решение. При $a < -2$ и при $a > 1$ система не имеет решений.

Ответ. $a < -2$, $a > 1$.

Параметры. Использование системы координат *xOa*

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $(a - x^2)(x - a^2) \leq 0$ не содержит ни одного числа из отрезка $[0; 1]$.

Решение. Каждое решение $(x; a)$ неравенства изобразим точкой $(x; a)$ координатной плоскости xOa. Сначала изобразим все решения $(x; a)$ уравнения $a - x^2 = 0$ и $x - a^2 = 0$. Это точки графиков функции $a(x) = x^2$ и …

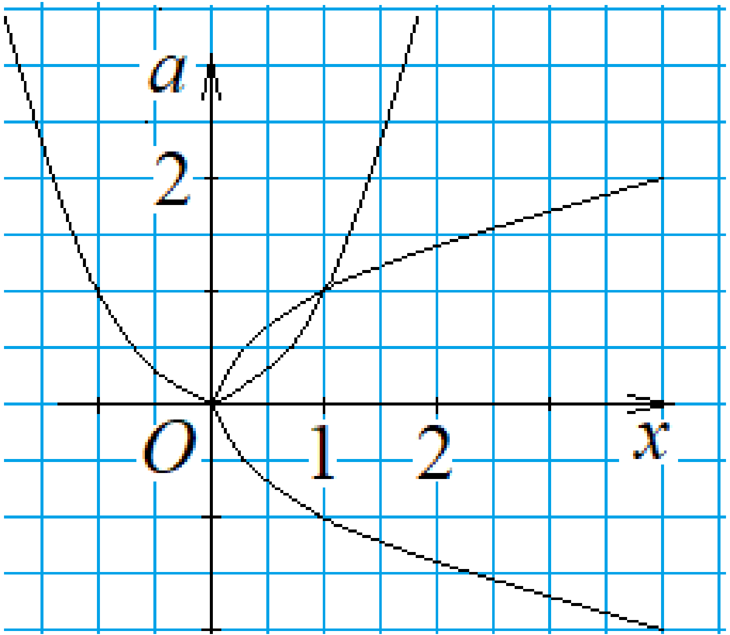


Параметры. Использование системы координат *xOa*

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $(a - x^2)(x - a^2) \le 0$ не содержит ни одного числа из отрезка $[0; 1]$.

Решение. Каждое решение $(x; a)$ неравенства изобразим точкой $(x; a)$ координатной плоскости xOa. Сначала изобразим все решения $(x; a)$ уравнения $a - x^2 = 0$ и $x - a^2 = 0$.

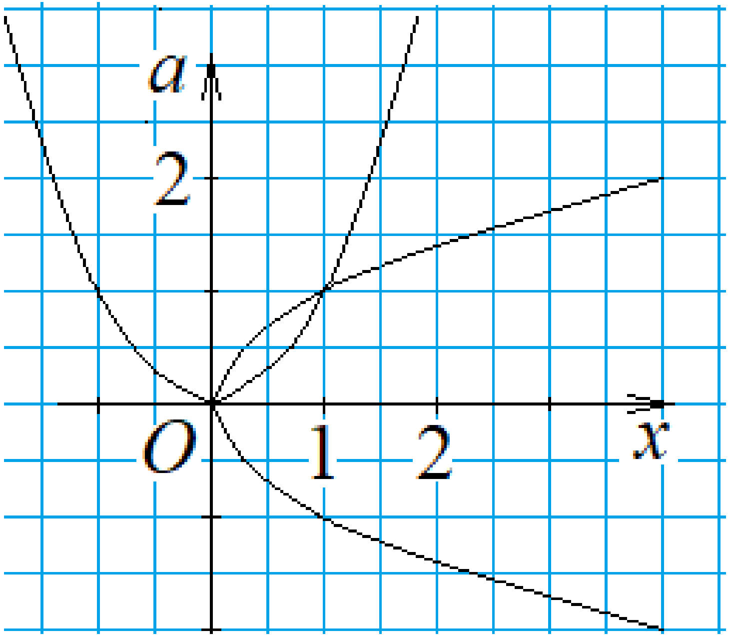
Это точки графиков двух функций $a(x) = x^2$ и $x(a) = a^2$.



Параметры. Использование системы координат xOa

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $(a - x^2)(x - a^2) \leq 0$ не содержит ни одного числа из отрезка $[0; 1]$.

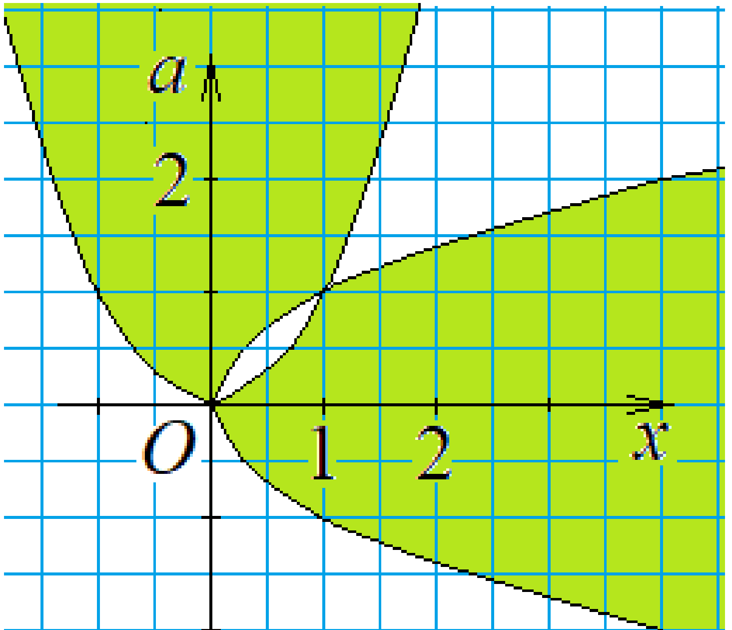
… Неравенство $(a - x^2)(x - a^2) \leq 0$ выполняется для всех пар чисел закрашенной области.



Параметры. Использование системы координат *xOa*

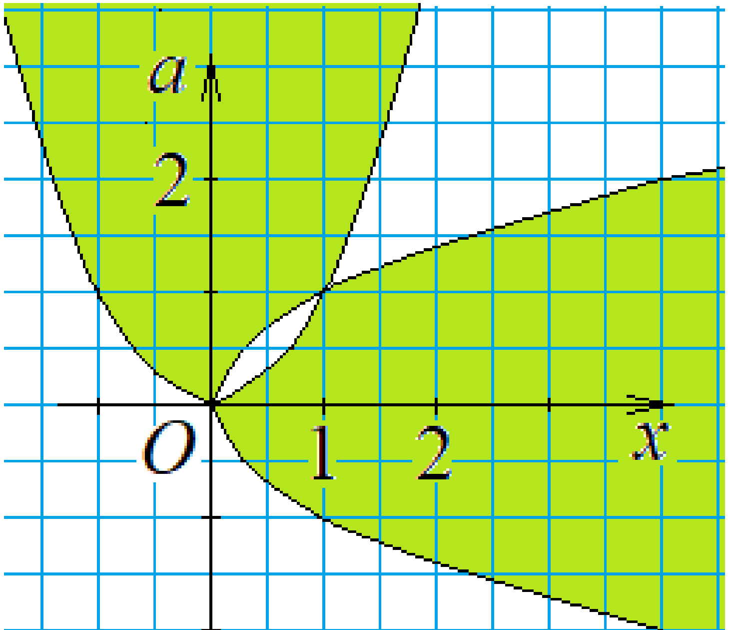
7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $(a - x^2)(x - a^2) \le 0$ не содержит ни одного числа из отрезка $[0; 1]$.

… Неравенство $(a - x^2)(x - a^2) \le 0$ выполняется для всех пар чисел закрашенной области.



Параметры. Использование системы координат *xOa*

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $(a - x^2)(x - a^2) \leq 0$ не содержит ни одного числа из отрезка $[0; 1]$.



… Если $a < -1$, то неравенство не имеет решений x из отрезка $[0; 1]$.

Если $a \geq -1$, то неравенство имеет хотя бы одно решение x из отрезка $[0; 1]$.

Ответ. $a < -1$.

Параметры. Использование системы координат xOy

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое число из интервала (3; 4) не является решением неравенства $\sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \leq x^2 - 3x$.

Можно построить параболу $a = x^2 - 3x$. Переписать данное неравенство в виде $|a - x| \leq x^2 - 3x$. Рассмотреть случаи $a \geq x$ и $a < x$, в каждом из них раскрыть модуль, упростить неравенство, изобразить все решения $(x; a)$ каждого из полученных неравенств, а потом ответить на вопрос задачи. Это хорошее задание на дом.

Рассмотрим более простое решение.

Параметры. Использование системы координат *xOy*

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое число из интервала (3; 4) не является решением неравенства $\sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \le x^2 - 3x$.

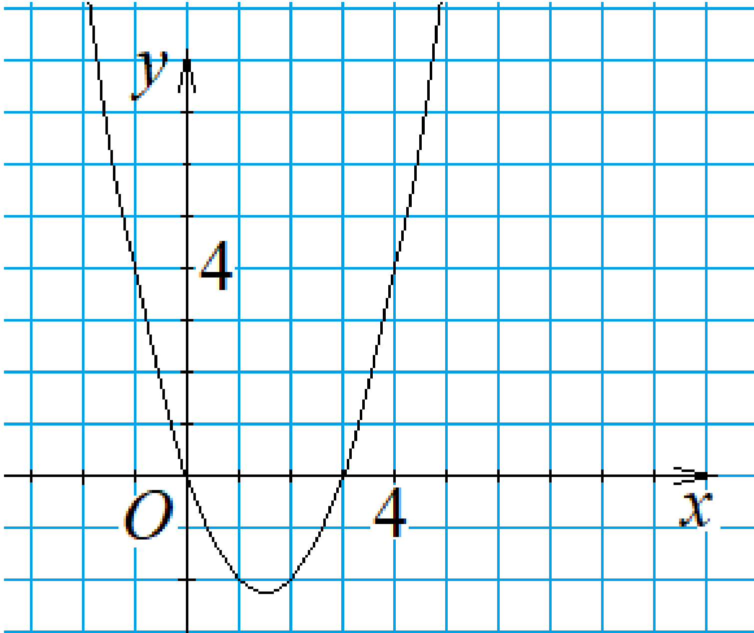
Решение. Решим задачу в привычной системе координат xOy. Перепишем данное неравенство в виде

$$|x - a| \le x^2 - 3x.$$

Будем искать все значения параметра a, при каждом из которых для каждого числа $x \in (3; 4)$ точка графика функции $y = |x - a|$ выше точки графика функции $y = x^2 - 3x$. Построим график функции $y = x^2 - 3x$.

Параметры. Использование системы координат *xOy*

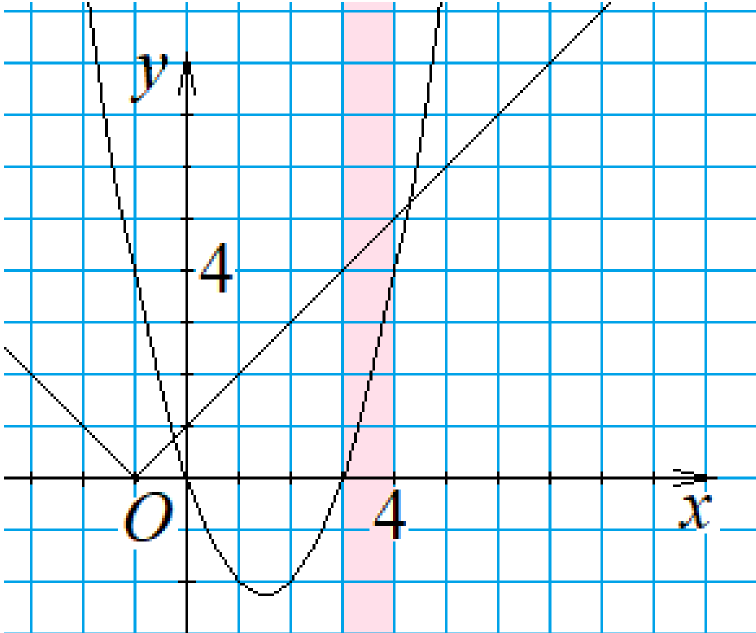
8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое число из интервала (3; 4) не является решением неравенства $\sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \le x^2 - 3x$.



…Будем перемещать график функции $y = |x - a|$, меняя значение параметра a. При $a \le 0$ для каждого числа $x \in (3; 4)$ точка прямой выше точки параболы — все значения $a \le 0$ удовлетворяют условиям задачи.

Параметры. Использование системы координат xOy

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое число из интервала (3; 4) не является решением неравенства $\sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \leq x^2 - 3x$.

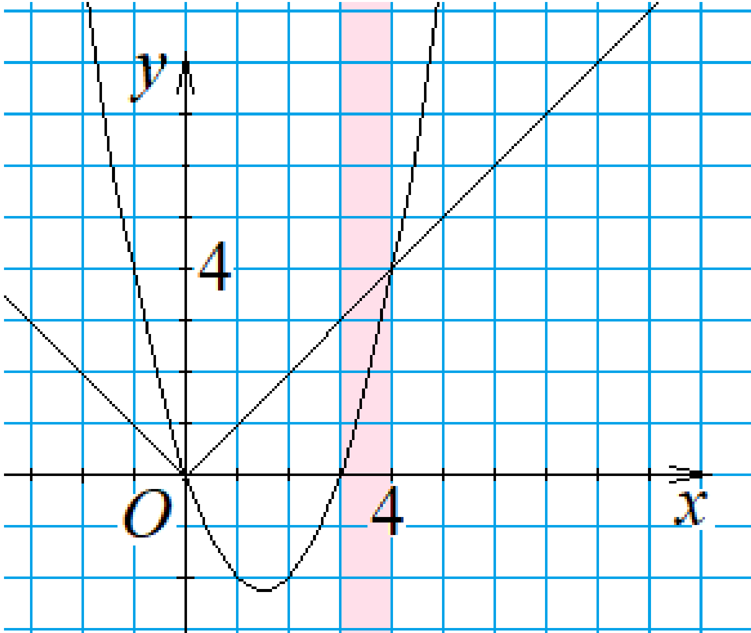


…Будем перемещать график функции $y = |x - a|$, меняя значение параметра a. При $a \leq 0$ для каждого числа $x \in (3; 4)$ точка прямой выше точки параболы — все значения $a \leq 0$ удовлетворяют условиям задачи.

Параметры. Использование системы координат xOy

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое число из интервала (3; 4) не является решением неравенства $\sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \le x^2 - 3x$.

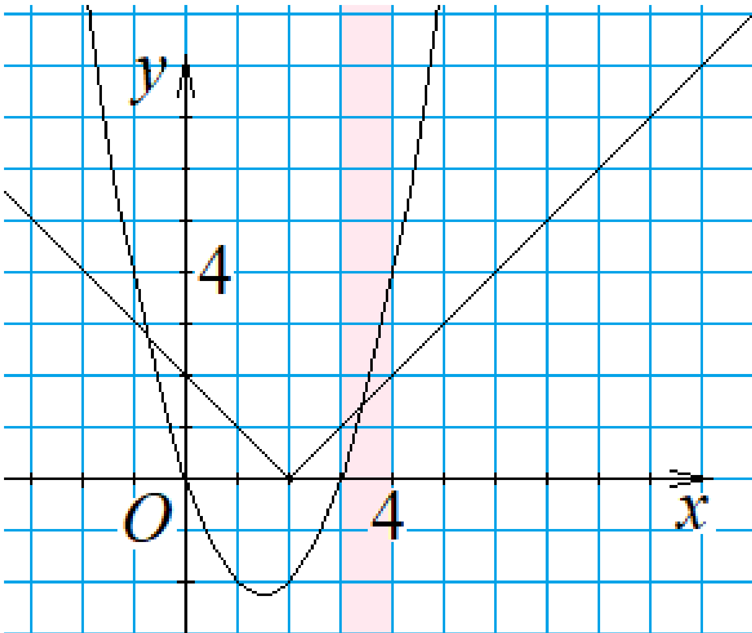
…Будем перемещать график функции $y = |x - a|$, меняя значение параметра a. При $a \le 0$ для каждого числа $x \in (3; 4)$ точка прямой выше точки параболы — все значения $a \le 0$ удовлетворяют условиям задачи.



Параметры. Использование системы координат xOy

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое число из интервала (3; 4) не является решением неравенства $\sqrt{a^2-2ax+x^2} \le x^2-3x$.

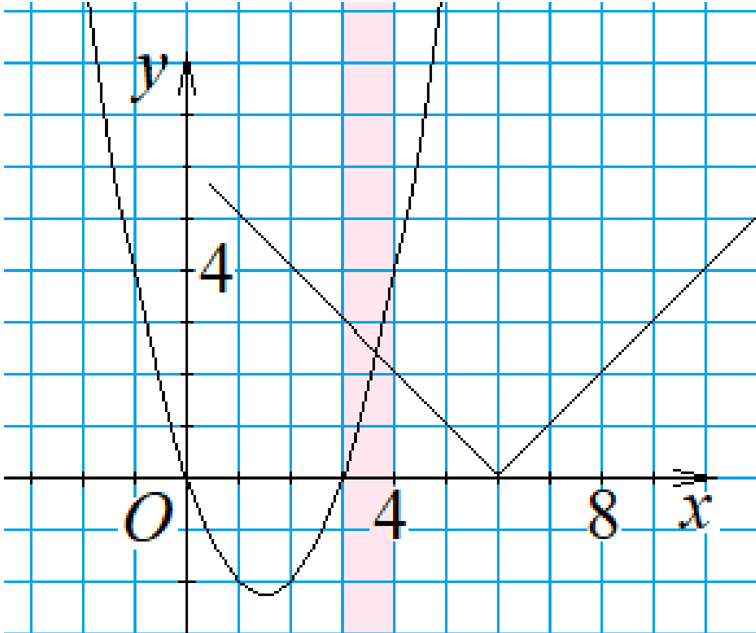
… При $0 < a < 8$ найдётся такое число $x \in (3; 4)$, которое является решением неравенства, т. к. в этом интервале найдётся число x, для которого точка прямой ниже точки параболы. Все значения $0 < a < 8$ не удовлетворяют условиям задачи.



Параметры. Использование системы координат xOy

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое число из интервала (3; 4) не является решением неравенства $\sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \leq x^2 - 3x$.

… При $0 < a < 8$ найдётся такое число $x \in (3; 4)$, которое является решением неравенства, т. к. в этом интервале найдётся число x, для которого точка прямой ниже точки параболы. Все значения a, такие, что $0 < a < 8$ не удовлетворяют условиям задачи.



Параметры. Использование системы координат *xOy*

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое число из интервала (3; 4) не является решением неравенства $\sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \le x^2 - 3x$.

…При $a \ge 8$ для каждого числа $x \in (3;\, 4)$ точка прямой выше точки параболы — все значения $a \ge 8$ удовлетворяют условиям задачи.

Ответ. $a \le 0$, $a \ge 8$.